

8 класс

«Городская олимпиада»

Задачи районного тура. 8 класс. 17 февраля 2007.

г. Бобруйск.

Задача 1. На столе лежит пластилиновый куб. Когда сверху на пластилин положили стальной куб, ребро которого в 3 раза больше ребра пластилинового куба, пластилин расплющился, и площадь его контакта со столом увеличилась вдвое. При этом давление на стол стало равным 7571 Па? Какое давление на стол оказывал вначале пластилиновый кубик? Плотность пластилина – 1400 кг/м³, плотность стали – 7800 кг/м³.

Рассмотрим сначала случай, когда на столе лежит кубик из пластилина. Пусть его масса – m , площадь – S , длина ребра – a . В этом случае давление равно:

$$p_1 = \frac{mg}{S} = \frac{\rho_{\text{пласт}} \cdot a^3 \cdot g}{a^2} = \rho_{\text{пласт}} ag \Rightarrow a = \frac{p_1}{\rho_{\text{пласт}} g}.$$

Пусть теперь на пластилиновый кубик положили стальной. Масса пластилинового кубика не изменилась, масса стального равна

$$m_{\text{сталь}} = 27\rho_{\text{сталь}}a^3g.$$

Таким образом, давление, оказываемое на стол, равно

$$p_2 = \frac{27 \cdot \rho_{\text{сталь}} a^3 g + \rho_{\text{пласт}} a^3 g}{2S} = \frac{ga}{2} (27 \cdot \rho_{\text{сталь}} + \rho_{\text{пласт}}) = \frac{p_1}{2\rho_{\text{пласт}}} (27 \cdot \rho_{\text{сталь}} + \rho_{\text{пласт}}).$$

Выразим искомое, начальное давление пластилинового кубика на стол

$$p_1 = \frac{2\rho_{\text{пласт}}}{27 \cdot \rho_{\text{сталь}} + \rho_{\text{пласт}}} p_2.$$

Вычислим искомое давление

$$p_1 = \frac{2 \cdot 1400}{27 \cdot 7800 + 1400} 7571 = 100 \text{ (Па)}.$$

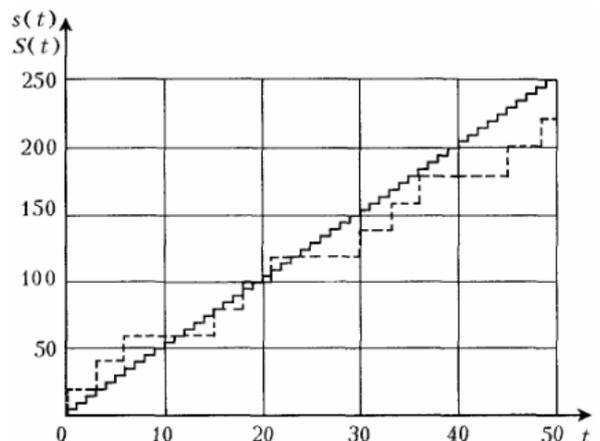
Задача 2. Две лягушки, большая и маленькая, прыгают по дорожке. Сначала они находятся рядом и первый прыжок делают одновременно. Маленькая лягушка делает один скачок на 5 см каждую секунду, а большая делает один скачок на 20 см каждые 3 секунды, но зато после каждого третьего прыжка отдыхает лишние 6 секунд. В результате маленькая лягушка то опережает большую, то отстает от нее. Через какое минимальное время после начала движения маленькая лягушка опередит большую так, что большая лягушка ее больше не нагонит. Считать, что лягушки делают прыжок почти мгновенно.

Построим графики движения обеих лягушек (рис.).

Здесь по оси абсцисс отложено время t (в секундах), а по оси ординат – расстояние (в сантиметрах) от точки начала движения для маленькой лягушки s и большой лягушки S .

Из рисунка видно, что последнее пересечение графиков происходит при $t = 24$ с, когда большая лягушка отдыхает второй раз.

Заметим, что в момент $t = 36$ с обе лягуш-



ки прыгают одновременно, и большая приземляется в точку, из которой только что прыгнула маленькая лягушка. Так как прыжок происходит не мгновенно, а «почти мгновенно», то в этом месте большая лягушка все-таки не догоняет маленькую.

Задача 3. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Площадь сечения одного сосуда в два раза больше площади другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На сколько сантиметров поднимется уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был расположен на $h = 36,8$ см ниже верхнего края сосуда. Плотность ртути в 13,6 раз больше плотности воды.

В широкий сосуд придется долить воды высотой $h + h_1$, где h_1 – это высота опускания ртути в широком сосуде. При этом ртуть, по отношению к своему первоначальному положению, поднимется на высоту h_2 . Высоты h_1 и h_2 свяжем, воспользовавшись равенством объемов ртути, в силу ее не сжимаемости.

$$h_1 S_1 = h_2 S_2,$$

так как, по условию задачи $\frac{S_1}{S_2} = 2$, то $h_2 = 2h_1$.

Давление создаваемое водой в широком сосуде будет равно давлению ртути в узком сосуде

$$\rho_w g(h + 2h_2) = \rho_p g\left(\frac{h_2}{2} + h_2\right).$$

Отсчет высоты ведется от нижнего уровня ртути в широком сосуде.

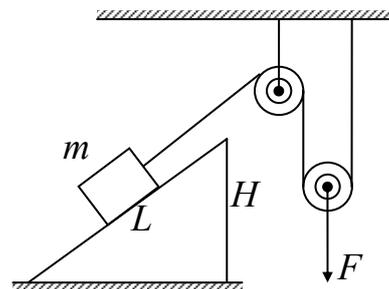
Решим последнее уравнение относительно искомой высоты.

$$\rho_w h + 2\rho_w h_2 = \rho_p \frac{3h_2}{2} \Rightarrow h_2 = \frac{\rho_w h}{\frac{3}{2}\rho_p - 2\rho_w}.$$

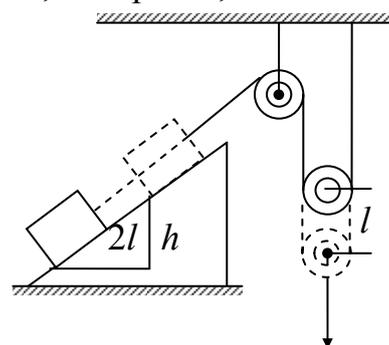
Вычислим h_2 :

$$h_2 = \frac{\rho_w h}{\frac{3}{2}13,6\rho_w - 2\rho_w} = \frac{h}{\frac{3}{2}13,6 - 2} = \frac{h}{18,4} = \frac{36,8}{18,4} = 2 \text{ см.}$$

Задача 4. Тело поднимают с помощью наклонной плоскости (закреплена) и системы блоков (см. рис. 1). Какую минимальную силу F нужно приложить, чтобы поднять тело массы m ? Высота наклонной плоскости равна H , длина L . Блоки невесомые. Трением пренебречь.



Пусть подвижный блок передвинули на расстояние l вниз, совершив, таким образом, работу Fl . Тело на наклонной плоскости при этом сдвинулось на $2l$ и поднялось на высоту h , которую просто определить из подобия треугольников: $h = 2l \frac{H}{L}$. Так как трение в системе отсутствует, то совершенная работа равна



изменению энергии тела: $mg\left(2l\frac{H}{L}\right) = Fl$. Отсюда просто определить F .

$$F = \frac{2mgH}{L}.$$

Задача 5. Крыша здания цирка представляет собой купол полусферической формы (рис. 2). Семиклассник Вова предложил заменить полусферический купол на конусообразный меньшей высоты ($h_1 < h_0$), утверждая, что при этом площадь крыши уменьшится, и, значит, уменьшится сила давления атмосферного воздуха на опоры крыши. Восьмиклассник Федя возразил Вове, предложив конический купол большей высоты ($h_2 > h_0$). При этом, доказывая Федя, крыша будет более крутой, и поэтому на ее опоры будет действовать меньшая сила давления воздуха. Кто из ребят прав и почему? Разрешите возникший спор.

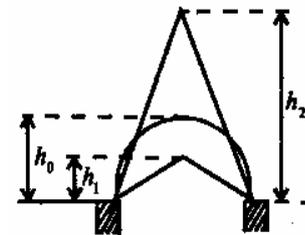


Рис. 2.

Сила давления атмосферного воздуха на крышу, а значит, и на ее опоры во всех случаях будет одинаковой и равной нулю, так как воздух оказывает давление на крышу не только снаружи, но и изнутри, причем одинаково.