9 класс

«Городская олимпиада»

Бобруйск 2007 г 17 февраля.

Задачи районного тура. 9 класс. 17 февраля 2007.

г. Бобруйск.

Задача 1. Поезд длиной L = 1500 м движется по прямому участку дороги со скоростью v_1 = 36 км/ч. Вертолет пролетает от начала поезда до его конца, а затем обратно с разницей во времени Δt = 1 мин 40 с. Определите скорость вертолета, считая ее постоянной.

Перейдем в систему отсчета связанную с поездом. Тогда время движения вертолета от начала поезда до его конца равно

$$t_1 = \frac{L}{v_1 + v_2}, \text{ а обратно } t_2 = \frac{L}{v_1 - v_2}.$$

Разница во времени

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_2 - v_1} - \frac{L}{v_2 + v_1}.$$

Приведем к общему знаменателю

$$\Delta t = \frac{2Lv_1}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Решим последнее уравнение относительно искомой скорости вертолета:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Lv_1}{\Delta t} + v_1^2}.$$

Проведем вычисления:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1500 \cdot 10}{100} + 10^2} = 20 \text{ м/с}.$$

Примечание: какая-то скорость у вертолета подозрительная.

Задача 2. В цилиндрическом сосуде высотой 17 см, площадью сечения 100 см^2, находится вода массой 1,6 кг при температуре 10 $^{\circ}$C. В воду аккуратно опускают кусочек льда массой 200 г при температуре 0 $^{\circ}$C.

2.1. Определите установившуюся температуру в сосуде.

2.2. Сколько воды будет в стакане после установления теплового равновесия.

Табличные данные: удельная теплоемкость воды c = 4200 Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг. Плотность воды 1000 кг/м^3, льда – 900 кг/м^3.

Тепловыми потерями на нагревание стакана и окружающей среды пренебречь.

В начале сделаем оценку высоты воды в стакане.

$$m = \rho \cdot S \cdot h \Rightarrow h = \frac{m}{\rho \cdot S} = \frac{1{,}6}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 0{,}16 \text{ (м)}.$$

Стакан заполнен водой до высоты 16 см. Опустим в стакан с водой кусочек льда. При равновесии лед будет плавать при условии

$$m_л g = \rho g V_п,$$

лед вытеснит воду объемом $V_п = \dfrac{m_л}{\rho} = \dfrac{0{,}2}{1000} = 0{,}0002$ (м^3)

В стакане, над водой имеется свободный объем

$$V = S(h - h_в) = 100 \cdot 10^{-4}(0,17 - 0,16) = 1 \cdot 10^{-4} = 0,0001 (м^3)$$

Следовательно, из стакана выльется объем воды равный

$$\Delta V = V_п - V = 0,0002 - 0,0001 = 0,0001 \ (м^3).$$

Это соответствует массе воды $\Delta m = \rho V = 10^3 \cdot 10^{-4} = 0,1$ (кг).

Итак: в сосуде останется вода массой 1,5 кг и лед массой 0,2 кг.

Для плавления льда понадобится энергии

$$Q_{пл} = \lambda m_л = 3,3 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = 66000 \ (Дж)$$

Максимальное количество энергии, которое может выделиться при охлаждении воды, составит

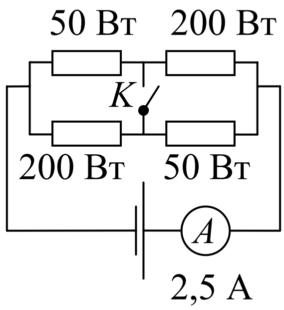
$$Q_{охл} = cm_в(t - 0) = 4200 \cdot 1,5 = 63000 \ Дж.$$

В результате расплавится лед массой

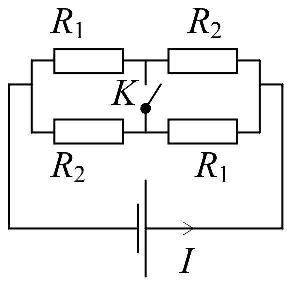
$$m_л = \frac{Q_в}{\lambda} = \frac{63000}{3,3 \cdot 10^5} \approx 0,191 \ (кг).$$

В сосуде останется 0,009 кг льда и 1,509 кг воды при температуре 0 $^\circ$С.

Задача 3. К регулируемому источнику напряжения подключена схема из четырех резисторов, как показано на рисунке. Амперметр показывает ток 2,5 А. На двух резисторах выделяется мощность 50 Вт, на других двух – 200 Вт. Ключ K замыкают, а напряжение источника изменяют так, чтобы амперметр опять показывал 2,5 А. Какие мощности будут выделяться на резисторах после этого?



Поскольку до замыкания ключа сила тока через все резисторы одинакова и равна $\frac{I}{2}$, сопротивления резисторов, на которых выделяется одинаковая мощность, равны.



Мощности, выделяющиеся на резисторах:

$$P_1 = \frac{I^2}{4} R_1, \ P_2 = \frac{I^2}{4} R_2.$$

Сопротивления резисторов

$$R_1 = \frac{4P_1}{I^2} = 32 \ Ом, \ R_1 = \frac{4P_2}{I^2} = 128 \ Ом.$$

После замыкания ключа напряжения на всех резисторах одинаковы.

Определим токи через них:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2, I_1 + I_2 = I,$$

поскольку ток через амперметр разделяется между резисторами.

Поэтому

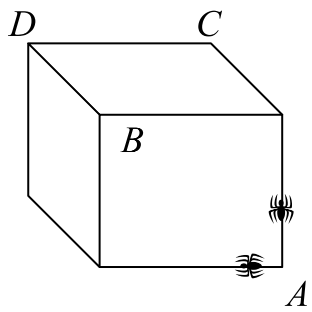
$$I_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2} = \frac{IP_2}{P_1 + P_2} = 2 \ A,$$

$$I_2 = \frac{IP_1}{P_1 + P_2} = 0,5 \ A.$$

Выделяющиеся мощности:

$$P_1^{/} = I_1^2 R_1 = \frac{4P_1P_2^2}{P_1+P_2} = 128 \text{ (Вт)},\ P_1^{/} = \frac{4P_2P_1^2}{P_1+P_2} = 32 \text{ (Вт)}.$$

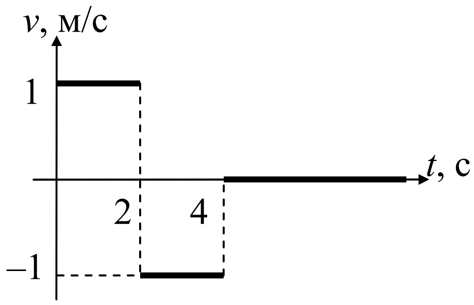
Задача 4. Два жука ползут с одной и той же скоростью по ребрам проволочного куба, который составлен из проволочек одинаковой длины, соединенных в вершинах куба так, что брюшко жука направлено к центру куба. Каждый жук при достижении вершины поворачивает налево, если на предыдущей вершине он повернул направо, и направо, если он на предыдущей вершине он повернул налево. Если два жука одновременно начали двигаться из одной вершины по разным ребрам, то где они встретятся?



Пусть жуки начинают ползти и нижнего правого угла A. Первый вверх, второй – налево. Когда жуки доползут до своих вершин, то второй повернет точно направо, так налево он начал движение. У первого – есть выбор налево или направо, так как он начал движение прямо. Если первый повернет налево, то встреча произойдет в вершине B. Если же он сделает выбор направо, то он поползет к вершине C, в которой повернет налево к вершине D, а второй, добравшись до вершины B, повернет налево и поползет тоже к вершине D. Тогда встреча произойдет в вершине D.

Проанализировав задачу, приходим к окончательному выводу: жуки встретятся или в противоположной вершине грани (т. B), или в противоположной диагональной точке (т. D).

Задача 5. Шарику, находящемуся на массивной ($M >> m$) плите сообщают скорость направленную вертикально вверх и равную 10 м/с. Одновременно с этим плита начинает движение вертикально вверх. На графике представлена зависимость проекции скорости плиты на вертикальное направление от времени. Скорости плиты и мяча заданы относительно Земли.



5.1. Определите расстояние между плитой и шариком в момент достижения последним максимальной высоты подъема.

5.2. На какую высоту подскочит шарик после первого абсолютно упругого столкновения с плитой.

5.3. Определите скорость шарика в момент остановки плиты.

5.4. С какой скоростью шарик упадет на остановившуюся плиту.

Примечание: 1) при абсолютно упругом столкновении происходит изменение направления вектора скорости без изменения величины самой скорости. 2) ответы должны быть получены для исходной системы отсчета в которой заданы начальные скорости шарика и плиты.

Решение 5.1.

Шарик, брошенный вертикально вверх поднимется за время $t = \frac{v_o}{g} = 1$ (с) до максимальной высоты $h = \frac{v_o^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 5$ (м), относительно начального своего положения. За одну секунду полета шарика плита переместится вверх на расстояние $S = v_1 t = 1 \cdot 1 = 1$ (м). Следовательно, расстояние между плитой и шариком при достижении последним максимальной высоты подъема составит $L = h - S = 5 - 1 = 4$ (м).

Решение 5.2.

В течение 2 с плита равномерно движется вверх и пройдет относительно своего первоначального положения $S = v_1 t_1 = 1 \cdot 2 = 2$ м. Шарик, поднявшись на высоту 5 м за 1 с за это же время вернется в первоначальное положение (при отсутствии плиты). Следовательно, столкновение произойдет раньше. Запишем уравнения движения для плиты $y_1 = 1 + 1t$ и для шарика $y_2 = 5 - \frac{gt^2}{2}$. В момент столкновения координаты совпадут, тогда

$$5 - \frac{gt^2}{2} = 1 + 1t \text{ или } 5t^2 + 1t - 4 = 0 .$$

Решая это уравнение, относительно времени столкновения, получим

$$t_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{10} .$$

Откуда $t_1 = 0{,}8$ с и $t_2 = -1$ с.

По условию задачи нам подходит первый корень.

Столкновение шарика с плитой произойдет в точке

$$x_1 = x_2 = v_1 (t_1 + t_2) = 1 \cdot 1{,}8 = 1{,}8 \text{ (м)}$$

относительно первоначального положения шарика и плиты.

При столкновении скорость шарика будет равна $v_2 = g t_2 = 10 \cdot 0{,}8 = 8$ м/с. Для определения скорости отскока шарика относительно земли после упругого взаимодействия с плитой перейдем в систему отсчета связанную с плитой. В этой систем отсчета шарик будет налетать на покоящуюся плиту со скоростью (8 + 1) = 9 (м/с), с такой же скоростью он и отскочит от «остановленной» плиты. Возвращая плиту в прежнее состояние (движение вверх с постоянной скоростью 1 м/с) мы должны учесть прибавку этой же скорости и шарику. В результате взаимодействия с плитой шарик отскочит со скоростью $v_3 = v_2 + 2v_1 = 8 + 2 \cdot 1 = 10$ м/с. Высота подъема шарика опять составит 5 м относительно места столкновения с плитой или шарик окажется на расстоянии $S_1 = 1{,}8 + 5 = 6{,}8$ (м) относительно первоначального своего положения.

Решение 5.3.

После столкновения с шариком плита будет двигаться вверх еще 0,2 с и вниз 2 с до остановки. Следовательно, шарик будет находиться в полете до остановки плиты 2,2 с. За это время он поднимется вверх (1 с) и свободно будет падать 1,2 с вниз. При этом его пройденное расстояние составит $H_1 = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \cdot 1{,}2^2}{2} = 7{,}2$ (м), что превышает высоту, на которой находился шарик (6,8 м) относительно первоначального уровня. Это означает, что столкновение шарика и плиты произойдет еще до остановки плиты. Найдем координату столкновения. Запишем уравнения движения на момент нахождения шарика в своей высшей точке. В этот момент плита уже сменила направление своего движения (через 0,2 с) и прошла расстояние за 0,8 с равное 0,8 м и ее координата составляет 1,2 м. Тогда

$$y_1 = 1,2 - 1t \text{ и } y_2 = 6,8 - \frac{gt^2}{2}.$$

Приравняем координаты

$$1,2 - 1t = 6,8 - \frac{gt^2}{2} \text{ или } 5t^2 - 1t - 5,6 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$t_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 112}}{10},$$

откуда $t_1 = 1{,}16$ (с) и $t_1 = -19{,}6$ с.

Понятно, что нас интересует первый корень $t_1 = 1{,}16$ (с). К моменту столкновения шарик приобретет скорость $v_3 = gt = 10 \cdot 1{,}16 = 11{,}6$ м/с. Перейдя в систему отсчета связанную с плитой (движется вниз) шарик налетает со скоростью, модуль которой равен 11,6 – 1 = 10,6 (м/с). С такой же скоростью он отскакивает относительно покоящейся плиты. Следовательно, «запустив» плиту обратно, мы вычтем скорость плиты из скорости отскочившего шарика, в итоге скорость отскока шарика составит 10,6 – 1 = 9,6 м/с. Это произойдет в точке с координатой $y_1 = 1{,}2 - 1 \cdot 1{,}16 = 0{,}04$ (м).

До остановки шарику потребуется время $t' = \frac{0{,}04}{1} = 0{,}04$ с. Тогда скорость шарика в момент остановки плиты составит $v' = 9{,}6 - 10 \cdot 0{,}04 = 9{,}2$ м/с.

<u>Решение 5.4</u>.

Высота подъема шарика составит, относительно первоначального положения

$$H = \frac{v^2}{2g} + y_1 = \frac{9,6^2}{2 \cdot 10} + 0,04 = 4,648 \text{ м}.$$

Скорость падения шарика на плиту составит

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 4,648} = 9,64 \text{ м/с}.$$

Ответы: 4 м; 6,8 м; 9,2 м/с; 9,64 м/с