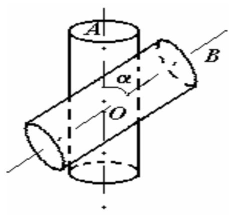
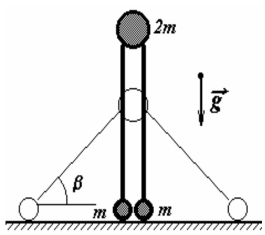
Условия задач. Теоретический тур.



1. К горизонтально расположенному шероховатому цилиндру радиусом R_1, вращающемуся с постоянной частотой n_1, прижимают сверху шероховатый цилиндр радиусом R_2. Ось второго цилиндра также горизонтальна, угол AOB равен α. Определите установившуюся частоту вращения верхнего цилиндра. Оси обоих цилиндров жестко закреплены. Поверхности цилиндров не деформируются.



2. Три шарика массами m, $2m$, m шарнирно скреплены легкими жесткими стержнями длиной l и установлены вертикально на гладкой горизонтальной плоскости. Систему легким толчком выводят из положения равновесия. Определите скорости шаров в момент когда стержни составляют угол β с горизонтом, если система все время остается в вертикальной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. В высокий цилиндрический сосуд радиусом R до уровня h налита жидкость плотностью ρ. В сосуд помещают сплошной однородный цилиндр радиусом r ($r < R$), высотой l ($l < h$) и плотностью ρ_C ($\rho_C < \rho$), который свободно плавает на поверхности. На него ставят другой такой же цилиндр. И так далее. При каком минимальном количестве цилиндров, нижний цилиндр «пирамиды» достанет дна? Жидкость из сосуда не выливается, ось «пирамиды» остается все время вертикальной.

4. Из куска меди массой 4,5 кг выплавили прямоугольный параллелепипед, который использовали в качестве нагревательного элемента с источником постоянного напряжения. Тепловые мощности при различном подключении проводника относятся друг к другу как 1:2:8. Определите размеры проводника, если плотность меди $\rho = 9{,}0\cdot10^3$ кг/м^3. Подключение проводника осуществлялось с помощью широких шин, прижимаемых к взаимно противоположным граням параллелепипеда. Краевые эффекты растекания тока не учитывать.

5. Брусок массой $m_o = 1{,}0$ кг, изготовленный из материала, удельная теплоемкость которого зависит от температуры t по закону $c(t) = c_o(1 + \alpha t)$, где $c_o = 1{,}3\cdot10^3$ Дж/(кг·К), $\alpha = 0{,}012$ К$^{-1}$, опускают в калориметр. Начальная температура бруска $t = 0{,}0$ ^oC. В калориметре находится $m_1 = 0{,}5$ кг воды при температуре $t = 45$ ^oC. Найти установившуюся температуру воды в калориметре. Теплоемкостью калориметра и тепловыми потерями пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

Решения задач.

Решение 1. В первый момент после соприкосновения относительная скорость поверхностей цилиндров равна скорости поверхности нижнего цилиндра $v_1 = 2\pi n_1 R_1$. Нормальная относительно оси *OB* составляющая этой скорости, (точнее, силы трения) раскручивает цилиндр. Возникает сила трения за счет разности относительных скоростей. Нормальная составляющая силы трения   исчезает, когда относительная скорость $\vec{v}_{отн} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ станет параллельна оси *OB*. Из прямоугольного треугольника скоростей $v_2 = v_1 \cos\alpha$ или через частоты

$$2\pi n_2 R_2 = 2\pi n_1 R_1 \cos\alpha .$$

Откуда искомая частота

$$n_2 = \frac{R_1 n_1 \cos\alpha}{R_2}.$$

Решение 2. По условию задачи система находится в вертикальной плоскости, т.е. в плоскости рисунка. Ввиду симметричного разъезжания стержней скорости нижних тел, скользящих по плоскости, одинаковы по модулю

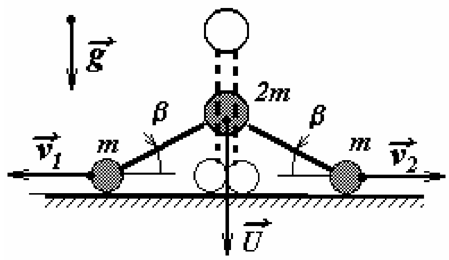
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

Диссипативные силы отсутствуют, поэтому можно воспользоваться законом сохранения энергии. Будем считать, что значение потенциальной энергии отсчитывается от плоскости основания. Тогда

$$E_{\text{пот}1} = E_{\text{пот}2} + E_{\text{кин}2},$$

где

$$E_{\text{пот}1} = 2mgl, E_{\text{пот}2} = 2mgl\sin\beta, E_{\text{кин}2} = \frac{2mu^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2} = m\left(u^2 + v^2\right).$$



Подстановка соотношений для энергий в закон сохранения дает

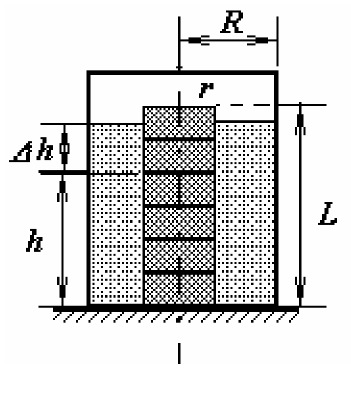
$$2gl = 2glsib\beta + u^2 + v^2. \ (1)$$

С другой стороны, неизменность длины стержня (по условию стержни жесткие) позволяет записать второе уравнение для проекций скоростей движения тел на направление прямой, проходящей по оси стержня

$$v\cos\beta = u\sin\beta, \Rightarrow v = utg\beta. \ (2)$$

Совместное решение (1), (2) позволяет выразить скорости шариков

$$u = \cos\beta\sqrt{2gl\left(1-\sin\beta\right)}, v = \sin\beta\sqrt{2gl\left(1-\sin\beta\right)}.$$



Решение 3. Пусть длина всей пирамиды, которая коснулась дна, есть L. Запишем условие плавания тел

$$F_{\text{арх}} = mg$$

или

$$\left(h + \Delta h\right)\pi r^2 \rho g = \pi r^2 L \rho_c g,$$

где Δh – подъем уровня жидкости, вследствие вытеснения ее цилиндрами. После сокращения получим

$$\left(h+\Delta h\right)\rho = L\rho_{\text{с}}. \ (1)$$

Условие несжимаемости жидкости позволяет написать второе уравнение

$$\pi r^2 h = \pi\left(R^2 - r^2\right)\Delta h. \ (2)$$

из (1) и (2) следует, что

$$L = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\cdot\frac{\rho}{\rho_{\text{с}}}h.$$

Теперь совсем просто подсчитать число цилиндров в колонне

$$N = \frac{L}{l},$$

причем, если L нацело делится на l, то это и будет ответ в задаче. Если же в результате деления мы получаем дробное число, то ответом будет следующее утверждение: число цилиндров равно целой части числа $\dfrac{R^2\rho h}{(R^2-r^2)\rho_c l}$ плюс еще один.

<u>Решение 4.</u> Внешний вид нагревательного элемента приведен на рисунке. Мощность тепловыделения не резисторе

$$P = U^2/R,$$

где его сопротивление

$$R = \rho_{\text{эл.}}\frac{l}{S}.$$

Здесь $\rho_{\text{эл.}}$ – удельное сопротивление меди, l – длина проводника, S – площадь поперечного сечения. Имеем три различных варианта подключения. Пусть для определенности $a > b > c$. Тогда

$$P_1 = P_a = \frac{U^2}{\rho_{\text{эл}}\, a/bc} = \frac{U^2 bc}{\rho_{\text{эл}} a}, P_2 = P_b = \frac{U^2 ac}{\rho_{\text{эл}} b}, P_3 = P_c = \frac{U^2 ab}{\rho_{\text{эл}} c},$$

причем

$$P_1 : P_2 = \frac{U^2 bc}{\rho_{\text{эл}} a} : \frac{U^2 ac}{\rho_{\text{эл}} b} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, a = \sqrt{2}b,$$

$$P_2 : P_3 = \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{4}, b = 2c.$$

С другой стороны, нам известен объем всего куска меди

$$V = abc = \sqrt{2}2^2 c^3 = m/\rho.$$

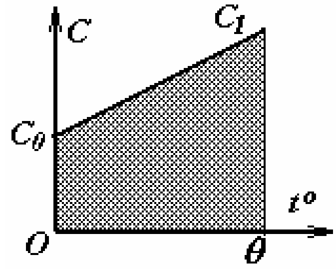
Теперь несложно найти размеры всех сторон

$$c = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}m}{8\rho}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\cdot 4{,}5}{8\cdot 9\cdot 10^3}} \approx 4{,}5 \text{ см}, b = 2c = 9{,}0 \text{ см}, a\sqrt{2}b \approx 12{,}6 \text{ см}.$$

Решение 5. Задача решается с помощью уравнения теплового баланса. Горячая вода отдает

$$Q_{\text{отд.}} = m_1 c_1 \left(t_1 - \theta\right) \ (1)$$

теплоты, где θ – окончательная температура в калориметре. Это количество теплоты передается бруску, специфическое свойство которого – зависимость теплоемкости от температуры $C(t)$, усложняет процедуру расчета. Площадь под графиком зависимости $C(t)$ равна



$$S_{O\theta C_1 C_o} = \sum_i C\left(t_i\right)\Delta t_i,$$

где i – определяет номер участка разбиения. С другой стороны, полученное количество теплоты

$$Q_{\text{пол.}} = \sum_i C\left(t_i\right)\Delta t_i m_o = m_o \sum_i C\left(t_i\right)\Delta t_i.$$

Таким образом,

$$Q_{\text{пол.}} = m_o S_{O\theta C_1 C_0}.$$

Площадь $S_{O\theta C_1 C_2}$ найдем как площадь трапеции

$$S_{O\theta C_1 C_2} = \frac{C_o + C_1}{2} \cdot \theta = \frac{C_o + C_o\left(1 + \alpha\theta\right)}{2}\theta = C_o\theta + \frac{\alpha C_o \theta^2}{2}$$

и, следовательно,

$$Q_{\text{пол.}} = m_o C_o\left(\theta + \frac{\alpha\theta^2}{2}\right). \ (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получаем квадратное уравнение относительно θ.

$$m_o C_o \frac{\alpha}{2}\theta^2 + m_o C_o \theta = m_1 C_1 t_1 - m_1 C_1 \theta.$$

В приведенном виде

$$\theta^2 + \frac{2\left(m_o C_o + m_1 C_1\right)}{\alpha m_o C_o} - \frac{2 m_1 C_1 t_1}{\alpha m_o C_o} = 0.$$

Это уравнение в числах

$$\theta^2 + 436\,\theta - 12115 = 0$$

имеет один из корней

$$\theta \approx 26\,^{\circ}\text{C}.$$

Второй корень физического смысла не имеет, он появился как следствие неоправданного использования формулы (2) в области $\theta < 0$.