ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС. 1992 г.
Условия задач.

1. Космический корабль начинает двигаться по прямой линии с ускорением, изменяющимся во времени так, как показано на графике (см. рис. 49). Через какое время корабль удалится от исходной точки в положительном направлении на максимальное расстояние? Начальная скорость корабля равна нулю.

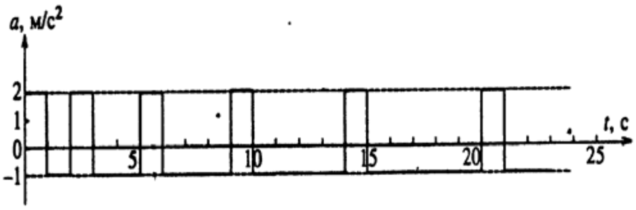

Рис.49

2. «Вечерело. Уставший за нелегкий день бедный рыбак Абдулла присел на берегу реки отдохнуть. Вдруг видит — плывет по волнам какой-то предмет, почти полностью погруженный в воду, только самый краешек виден на поверхности воды. Абдулла бросился в реку и вытащил его. Смотрит, а это старинный глиняный кувшин, с горлышком, плотно закрытым пробкой и залитым сургучной печатью, распечатал Абдулла кувшин и обомлел: из кувшина высыпалось 147 одинаковых золотых монет. Монеты Абдулла спрятал, а кувшин закрыл, залил горлышко сургучом и бросил кувшин обратно в реку. И поплыл кувшин дальше, примерно на треть выступая над водой.» — так говорится в одной из восточных сказок.

Полагая, что кувшин был двухлитровым, оцените массу одной золотой монеты.

3. При разведении теплолюбивых рыб в аквариуме для поддержания необходимой температуры воды $T_\text{Т}$ = 25 °С используется электрический нагреватель, мощность которого $P_\text{о}$ = 100 Вт. Для хладолюбивых рыб температура воды в аквариуме должна быть $T_\text{х}$ = 12 °С. Чтобы обеспечить низкотемпературный режим через погруженный в аквариум теплообменник — длинную медною трубку — пропускают водопроводную воду, температура которой $T_{\text{х}1}$ = 8 °С, (эффективность теплообменника столь высока, что вытекающая из трубки вода находится в тепловом равновесии с водой аквариума).

Предполагая, что мощность теплообмена между аквариумом окружающей средой пропорциональна разности температур между ними, определите минимальный расход воды ($k = \Delta m/\Delta t$) для поддержания заданного температурного режима. Комнатная температура $T_\text{о}$ = 20 $^\text{o}$С. Теплоемкость воды c = 4200 Дж/кг·К. Как изменится ответ, если в аквариуме будут разводить рыб, предпочитающих температуру воды T_x^* = 16 °С?

4. В схеме, изображенной на рис. 50, амперметр A_1 показывает величину тока I_1. Какой ток показывает амперметр A_2? Оба прибора идеальны. Отмеченные на рисунке параметры считайте известными.

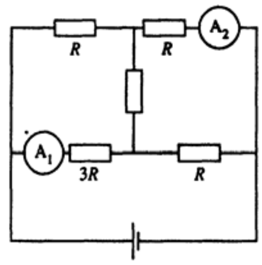

Рис.50

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА
9 класс. 1992 г.
Условия задач.

5. Тяжелая цепочка, состоящая из большого числа одинаковых гладких звеньев, свободно подвешена за концы (см. рис. 3.9). Масса всей цепочки $M = 0{,}2$ кг. Определите силу натяжения в нижней точке цепочки, а также в точке A, лежащей на половине глубины «провиса» цепочки.

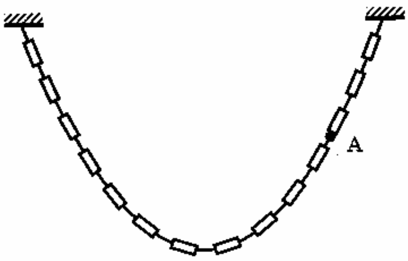

Рис. 3.9

6. Миниатюрный тигель (печка) для плавки металла имеет электронагреватель постоянной мощности $P_о = 20$ Вт. Нагреватель включают, и после того, как его температура практически перестает увеличиваться, в тигель бросают несколько кусочков олова, общая масса которых $M = 50$ г. Олово начинает плавиться. График зависимости температуры в тигле от времени представлен на рис. 4.9. Определите удельную теплоту плавления олова.

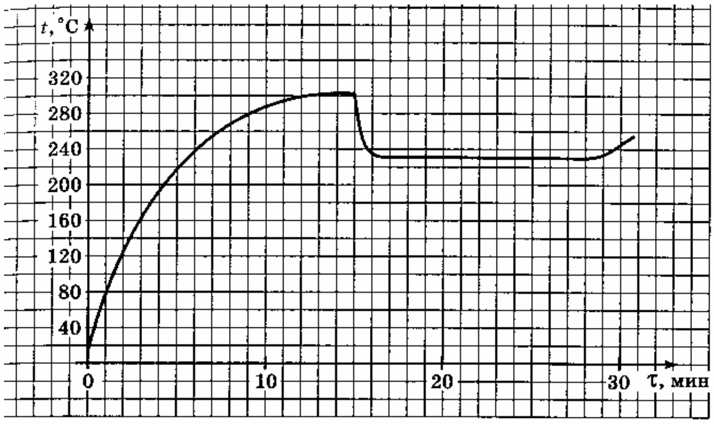

Рис. 4.9

7. Электронагреватель H подключают, соединяя его последовательно с амперметром и реостатом, к источнику тока и устанавливают реостатом ток 0,1 А (рис. 121). Затем в цепь между точками A и B включили резистор, сопротивление которого неизвестно. При этом амперметр стал показывать силу тока 0,05 А. Затем этот резистор с неизвестным сопротивлением отключили и включили его в другом участке цепи – между точками A и C. При этом амперметр стал показывать ток 0,3 А. Найдите отношение мощности нагревателя к полной мощности, развиваемой источником, то есть КПД схемы во всех трех случаях. Источник тока и амперметр можно считать идеальными. Сопротивление электронагревателя одно и то же во всех трех случаях.

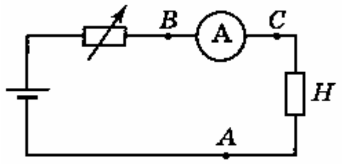

Рис. 5.9

8. На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две одинакового размера шайбы, радиус которых равен R. Шайбы соединены друг с другом с помощью тонкой и легкой нити (см. рис. 6.9). Длина нити $L = 2R$. Нить начали тянуть в горизонтальном направлении с постоянной силой F. Найдите силу, с которой шайбы будут давить друг на друга, когда их движение установится. Сила F приложена в середине нити. Трение можно считать малым.

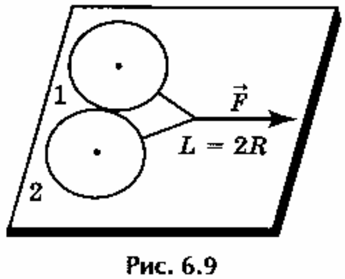

Рис. 6.9

Рассмотрите два случая: а) шайбы имеют одинаковую массу; б) масса одной шайбы в два раза отличается от массы другой.

Решение задач.

Решение 1. По графику зависимости ускорения от времени $a = a(t)$ строим график зависимости скорости от времени $v = v(t)$, площадь под которым численно равна перемещению (рис. 1). Из построенного графика видно, что корабль удалится на максимальное расстояние через 12 с после начала движения.

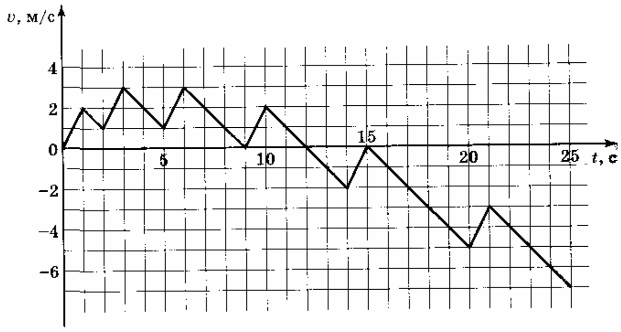

Рис. 1

Решение 2. Условие плавания кувшина с монетами в воде:

$$(M + 147m)g = \rho_в Vg, \quad (1)$$

M – масса кувшина, m – масса одной монеты, V – объем кувшина, $\rho_в$ – плотность воды; после того, как Абдула высыпал из кувшина монеты,

$$Mg = \rho_в \left(1 - \frac{1}{3}\right)Vg. \quad (2)$$

Решая (1) и (2), находим

$$147m = \frac{1}{3}\rho_в V,\; m = \frac{\rho_в V}{441} \approx 4{,}54 \text{ г}.$$

Решение 3. В аквариуме с теплолюбивыми рыбами энергия, поступающая от нагревателя, в конечном счете полностью передается окружающей среде. Условие теплового равновесия при этом имеет вид

$$P_o = \alpha(t_T - t_o),$$

где α – коэффициент пропорциональности мощности теплообмена.

Для аквариума с хладолюбивыми рыбами уравнение теплового баланса:

$$P_1 = \alpha(t_o - t_x),$$

где P_1 – мощность, подводимая к воде аквариума из окружающего воздуха. Эта же мощность должна отводиться водопроводной водой:

$$P_1 \Delta\tau = c\Delta m(t_x - t_1),$$

откуда

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{P_1}{c(t_x - t_1)}.$$

Поскольку $\dfrac{P_1}{P_o} = \dfrac{t_o - t_x}{t_T - t_o}$, получим $\dfrac{\Delta m}{\Delta\tau} = \dfrac{P_o(t_o - t_x)}{c(t_x - t_1)(t_T - t_o)}$, $\dfrac{\Delta m}{\Delta\tau} = 9{,}5$ г/с. Расход воды для аквариума с менее хладолюбивыми рыбами равен

$$\frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{P_o(t_o - t_x^*)}{c(t_o^* - t_1)(t_T - t_o)} = 2{,}4 \text{ г/с}.$$

Как видим, разводить рыб, предпочитающих температуру в 16 ^{o}С, в 4 раза экономичнее.

Решение 4. Сумма сил токов, вытекающих из точки A, равна сумме сил токов, втекающих в точку B, (рис.):

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4. \quad (1)$$

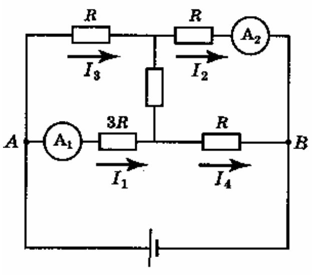

Рис. 2

Напряжение между точками A и B для верхней ветви равно

$$U = I_3 R + I_2 R \quad (2)$$

и такое же напряжение для средней ветви:

$$U = I_1 3R + I_4 R \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получаем $I_2 = 2I_1$.

<u>Решение 5.</u> По условию задачи цепочка гибкая. Это означает, что сила натяжения в каждой точке направлена по касательной. Рассмотрим правую половину цепочки, которая представлена на рисунке 3.

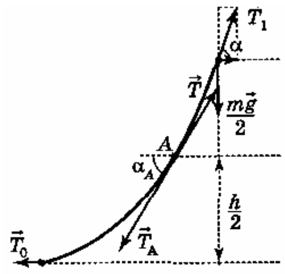

Рис. 3

Горизонтальная составляющая силы натяжения везде одинакова. Она равна по модулю силе натяжения в нижней части цепочки. Поэтому

$$T_o = T_1 \cos\alpha,\ T_1 \sin\alpha \frac{1}{2} mg \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{2\sin\alpha} \approx 1{,}05\ \text{Н};$$

$$T_o = \frac{mg}{2} ctg\alpha \approx 0{,}3\ \text{Н}.$$

Аналогично найдем силу T_A:

$$T_A \cos\alpha_A = T_1 \cos\alpha \Rightarrow T_A = \frac{mg}{2} ctg\alpha \frac{1}{\cos\alpha_A} \approx 0{,}65\ \text{Н}.$$

<u>Решение 6.</u> Из графика зависимости температуры t в тигле от времени τ следует, что m = 80 г олова плавились в течение $\Delta\tau$ = 12 мин. Чтобы найти удельную теплоту плавления олова, необходимо определить мощность, которая непосредственно затрачивалась на плавление. В начале процесса нагревания, когда его температура близка к температуре окружающей среды, можно пренебречь теплоотдачей в окружающее пространство и считать, что полная мощность электронагревателя затрачивалась на нагревание тигля. Скорость возрастания температуры, определенная по наклону касательной на начальном участке графика (рис. 4) составляла в этом случае примерно 60 К/мин.

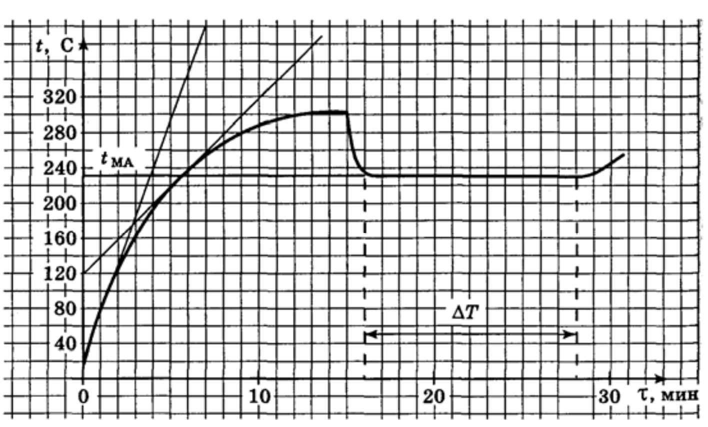

Рис. 4

При температуре плавления олова ($t_{пл}$ = 232 ^{o}C) скорость возрастания температуры равнялась примерно 18 К/мин, т. е. приблизительно в 3 раза меньше. Это означает, что теплоотдача в окружающее пространство при $t = t_{пл}$ составляла приблизительно 66 % от полной мощности нагревателя, а 34 % мощности затрачивалось на согревание тигля. Такая же доля мощности нагревателя затрачивалась на плавление олова при $t = t_{пл}$. Из этих данных можно определить удельную теплоту λ плавления олова:

$$\lambda = \frac{0{,}34 P_o \cdot \Delta\tau}{m} = \frac{0{,}34 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 60}{0{,}08} = 61 \text{ кДж/кг}.$$

Решение 7. Обозначим напряжение источника через E. По условию внутренние сопротивления источника и амперметра равны нулю. Пусть сопротивление реостата равно r, сопротивление неизвестного резистора равно R и сопротивление нагревателя равно Z (рис. 5). Из схем II и III ясно, что при включении резистора между точками AB и AC сила тока, текущего через источник, остается постоянной и равной I_3 = 0,3 А. Кроме того, очевидно, что сила тока, текущего через нагреватель, тоже одинакова и рана I_2 = 0,05 А. В свою очередь сила тока через резистор

$$I_R = I_3 - I_2 = 0{,}25 \text{ А}.$$

Для вычисления КПД все сопротивления удобно выразить через Z. Из условия

$$I_R R = I_2 Z \rightarrow R = \frac{Z}{5}.$$

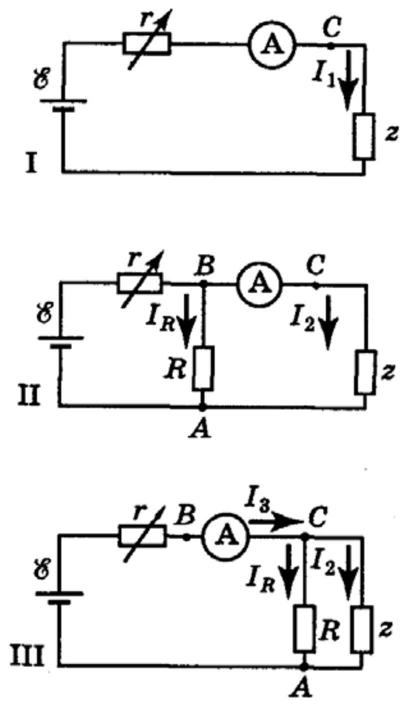

Рис. 5

При параллельном соединении R и Z получаем $R_{общ} = \frac{Z}{6}$.

Используя закон Ома, сравним силы тока:

$$I_1 = \frac{E}{r + Z} = 0{,}1 \text{ А}, \; I_3 = \frac{E}{r + Z/6} = 0{,}3 \text{ А}.$$

Решая систему, получим $r = \frac{Z}{4}$.

Итак, для схемы I определяем КПД:

$$\eta_1 = \frac{I_1^2 Z}{I_1^2 (Z + r)} = \frac{Z}{Z + \frac{Z}{4}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \Rightarrow \eta_1 = 80 \text{ \%}.$$

КПД схем II и III один и тот же:

$$\eta_2 = \eta_3 = \frac{I_2^2 Z}{I_3^2 (r + R_{общ})} = \frac{5^2}{3^2} \frac{10^{-4} Z}{10^{-2}\left(\frac{Z}{4} + \frac{Z}{6}\right)} = 0{,}067 \Rightarrow \eta_2 \approx 6{,}7 \text{ \%}.$$

Примечание: Зная КПД η_1 в первом случае, можно получить $\eta_2 = \eta_3$ путем следующих рассуждений. Сравнивая схему II со схемой I, видим, что сила тока через резистор возросла в три раза. Значит, полная мощность также увеличилась в три раза. Сила тока нагревателя уменьшилась в два раза, а значит, полезная мощность уменьшилась в четыре раза. Итак, $\eta_2 = \eta_2 = \frac{\eta_1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}\eta_1 = 6{,}7 \text{ \%}$.

Решение 8. В первом случае, когда массы шайб одинаковы, они будут двигаться вдоль биссектрисы угла, образованного половинками нити (рис. 6). Поскольку длина каждой половинки равна R, то из рисунка следует, что $\alpha = 30^\circ$. Ясно, что силы натяжения половинок нити одинаковы. Движение равноускоренное. Ускорение каждой шайбы равно

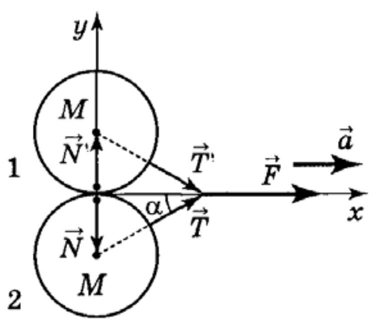

Рис. 6

$a_1 = a_2 = a = \frac{F}{2M}$, где M – масса каждой шайбы. Напишем уравнения движения, например, шайбы 1 в проекциях на оси координат:

По оси x:

$$T\cos\alpha = Ma \Rightarrow T = \frac{F}{2\cos\alpha}, \text{ где } a = \frac{F}{2M}.$$

По оси y:

$$N - T\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = T\sin\alpha.$$

Таким образом, $N = \dfrac{F}{2}tg\alpha = \dfrac{F}{2\sqrt{3}}$.

Во втором случае, когда $M_1 = M$, $M_2 = 2M$, шайбы будут двигаться под некоторым углом β к биссектрисе (рис. 7). Очевидно, поступательное движение шайб возможно, когда линия действия силы $\vec{F}$ проходит через центр масс системы. Легко получить, что центр масс системы находится на прямой, соединяющей центры шайб на расстоянии $2R/3$ от центра шайбы массой $2M$. Тогда, используя рис. 7, находим

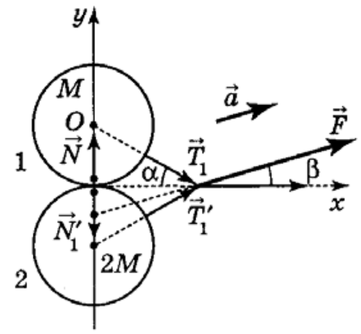

Рис. 7

$$tg\beta = \frac{1}{3}tg\alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Ускорение каждой из шайб равно

$$a = a_1 = a_2 = \frac{F}{3M}.$$

Запишем второй закон Ньютона для движения шайбы M в проекции на направление Ox', перпендикулярное силе натяжения $\vec{T}_1$ (рис. 8):

$$N\cos\alpha = Ma\cos(90 - \alpha - \beta) = Ma\sin(\alpha + \beta) \Rightarrow N = \frac{F}{3}\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$$

После тригонометрических преобразований находим

$$N = \frac{4F}{3}\sin\beta; \sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{28}}.$$

Окончательно $N = \dfrac{2F}{3\sqrt{7}} \approx 0,25F$.

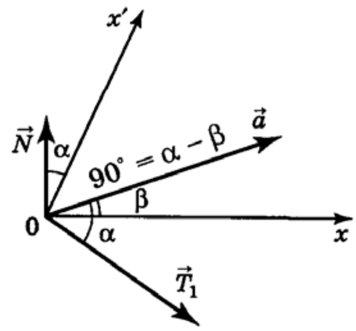

Рис. 8