ЗОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА
9 КЛАСС. 1996 г.
Условия задач.

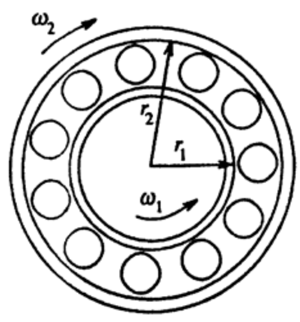

Рис.80

33. Внутреннее кольцо шарикоподшипника, имеющее радиус r_1, вращается с угловой скоростью ω_1 против часовой стрелки, наружное кольцо, радиус которого равен r_2, вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_2. Сам шарикоподшипник неподвижен (см. рис. 80). Определите скорость движения центров шариков. Считайте, что шарики катятся без проскальзывания и не соприкасаются между собой.

34. Тело, масса которого $m = 1$ кг, движется прямолинейно. График зависимости скорости тела v от его координаты x представляет собой прямую линию с углом наклона $\alpha = 30°$, проходящую через начало координат.

Масштаб графика: по оси x в 1 см – 1 м; по оси v в 1 см – 1 м/с.

Найдите силу, действовавшую на тело, когда оно находилось в точке с координатой $x = 2$ м.

35. В кастрюле плавает пористый кусок льда. Ровно половина по объему этого «айсберга» находится над водой. Лед вынули из воды, при этом ее уровень понизился на величину $\Delta h = 6$ см. Найдите суммарный объем воздушных полостей в куске льда, если поперечное сечение кастрюли $S = 200\text{см}^2$, а плотность льда $\rho = 917$ кг/м^3.

36.

> В далеком созвездии Тау Кита...
> Живут, между прочим, по-разному
> Товарищи наши по разуму...
> В. Высоцкий

Планета Косатка из созвездия Тау Кита имеет тот же размер, что и Земля, и состоит из несжимаемой жидкой субстанции, плотность которой 800 кг/м^3. Продолжительность суток на этой планете составляет 10 часов. Северный полюс Косатки направлен на Землю. Однажды ночью обитатель планеты Кит Вэйл всплыл на поверхность планеты в северном полушарии на широте 56°, чтобы полюбоваться звездным небом. Найдите угол между горизонтом в точке, где всплыл Вэйл, и направлением на Землю (средняя плотность которой 5500 кг/м^3, радиус 6400 км). Во всем созвездии Тау Кита широтой точки называется угол между радиусом, проведенным к ней из центра планеты, и плоскостью экватора.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА
9 класс. 1996 г.
Условия задач.

37. Минимальное время, которое необходимо, чтобы переплыть в лодке реку, равно t_0. Ширина русла реки равна H. Скорость течения реки постоянна в любом месте русла и в β раз больше скорости лодки ($\beta > 1$), плывущей в стоячей воде.

1. Найдите скорость лодки в стоячей воде.

2. На какое расстояние снесет лодку за минимальное время переправы?

3. Определите наименьшее расстояние, на которое может снести лодку за время переправы.

4. Найдите время переправы лодки в том случае, когда ее сносит на минимальное расстояние.

38. На тележке, движущейся по горизонтальной поверхности с ускорением $g/2$, установлены равноплечные весы, длина плеча которых равна l (см. рис. 161). На весах установлены два одинаковых по размеру, но изготовленных из разного материала, однородных кубика. Длина ребра каждого кубика равна a. Найдите отношение плотности материала одного и другого кубика, если известно, что весы при движении тележки находятся в равновесии, а кубики относительно весов неподвижны.

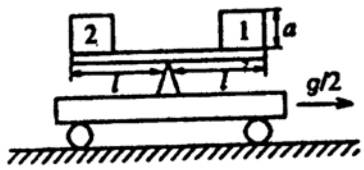

Рис.161

39. В кастрюлю поместили воду и лед при температуре $t_о = 0$ °C и закрыли ее крышкой. Масса воды и льда одинакова. Через время $\tau = 2$ ч 40 мин весь лед растаял.

1. Через какое время температура воды повысится на 1 °C?

2. Какое время потребуется, чтобы вода нагрелась от 20 °C до 21 °C?

Температура воздуха в комнате $t_к = 25$ °C. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·K). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}2\cdot10^5$ Дж/кг.

40. Резистор, сопротивление которого постоянно, и реостат подсоединены к источнику постоянного напряжения, как показано на рис. 162. При силе тока в цепи $I_1 = 2$ А на реостате выделяется мощность $P_1 = 48$ Вт, а при силе тока $I_2 = 5$ А на нем выделяется мощность $P_2 = 30$ Вт.

1. Определите напряжение источника и сопротивление резистора.

2. Найдите силу тока в цепи, когда сопротивление реостата равно нулю.

3. Найдите максимальную мощность, которая может выделиться на реостате. Чему равно сопротивление $R_м$ реостата в этом случае?

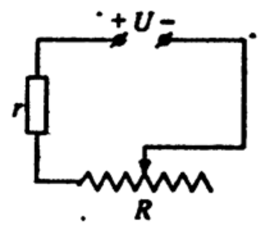

Рис.162

Решения задач.

Решение 33. Ответ: $v = \dfrac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{2}$.

Решение 34. За время Δt скорость тела изменится на $\Delta v = tg\alpha \Delta x$, где α – угол наклона прямой. Отсюда ускорение тела равно $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = tg\alpha \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v tg\alpha = x tg^2\alpha$.

Следовательно, сила, действовавшая на тело с координатой $x_о$, равна

$$F = ma = mx_o tg^2\alpha = \frac{2}{3} \text{ Н.}$$

Решение 35. Используем закон Архимеда:

$$m_л g = \rho_в g V_{выт}.$$

Заметим также, что

$$m_л = \rho_л (V_{айсб} - V_{пол}),\ V_{выт} = S\Delta h,\ \frac{1}{2}V_{айсб} = V_{выт}.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$V_{пол} = S\Delta h \frac{2\rho_л - \rho_в}{\rho_л} \approx 1090 \text{ см}^3.$$

Решение 36. Рассмотрим маленький элемент жидкости на поверхности планеты рядом с Вэйлом. Обозначим массу этого элемента через m. На него действует сила тяжести и сила реакции окружающей жидкости. Первая направлена к центру и равна $F_{тяж} = \frac{mg\rho}{\rho_o}$, а вторая $\vec{F}_{реак}$ направлена перпендикулярно поверхности планеты (рис. 25). Их сумма равна

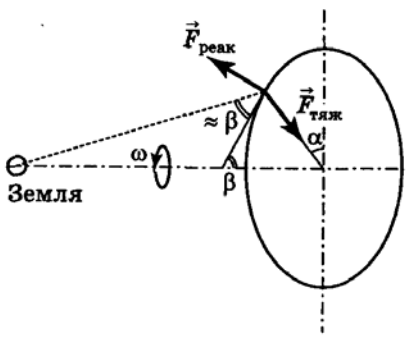

Рис. 25

$$\left|\vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{реак}\right| = m\omega^2 R\cos\alpha$$

и должна быть направлена перпендикулярно оси вращения планеты.

Отсюда находим

$$tg\beta = \frac{mg\sin\alpha\rho/\rho_o}{mg\cos\alpha\rho/\rho_o - m\omega^2 R\cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{1-\rho_o\omega^2 R/(g\rho)},$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Окончательно получаем $\beta \approx 60^o$.

Решение 37. 1. $v_o = \frac{H}{t_o}$. 2. Скорость течения реки $u = \beta v_o$; за время переправы лодку снесет на расстояние $L = ut_o = \beta v_o t_o$.

3. Скорость лодки относительно системы координат, связанной с берегом, равна $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_o$ (рис. 26). Из рисунка видно, что минимальное расстояние $L_{\min}$ сноса лодки соответствует случаю, когда скорость лодки $\vec{v}$ направлена по касательной к окружности радиуса v_0. Из подобия треугольников скоростей и расстояний, имеющих общий угол α, получим

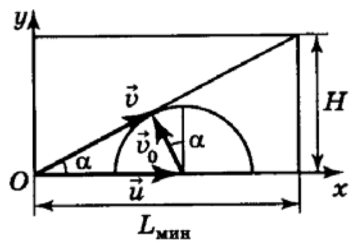

Рис. 26

$$\frac{L_{\min}}{H} = \frac{v}{v_o},$$

и так как $\vec{v} \perp \vec{v}_o$, находим

$$L_{\min} = H\frac{v}{v_o} = H\frac{\sqrt{u^2 - v_o^2}}{v_o} = H\sqrt{\beta^2 - 1}\,.$$

4. Время переправы лодки, когда ее сносит на минимальное расстояние, равно

$$t = \frac{H}{v_o \cos\alpha} = \frac{t_o}{\cos\alpha} = t_o\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\,.$$

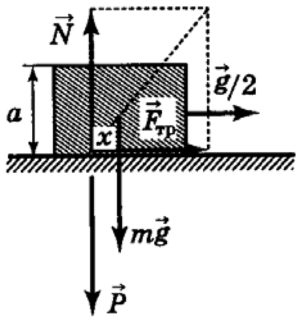
Рис. 27

Решение 38. Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть кубик находится на горизонтальной поверхности, движущейся с ускорением $g/2$ (трение достаточно велико). Определим расстояние от центра массы кубика до линии действия силы реакции опоры (рис. 27).

Ясно, что $N = mg$, $F_{тр} = \frac{mg}{2}$. Из уравнения моментов относительно полюса О следует: $Nx = F_{тр}\frac{a}{2}$, отсюда $x = \frac{a}{4}$.

По третьему закону Ньютона вес $\vec{P}$ кубика и реакция опоры $\vec{N}$ действуют вдоль одной прямой.

Возвращаясь к исходной задаче, можно утверждать, что линия действия веса каждого кубика смещены относительно центра масс кубиков влево на $x = \frac{a}{4}$.

Напишем условие равенства моментов сил, действующих на весы:

$$\rho_1 a^3 g\left(l - \frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right) = \rho_2 a^3 g\left(l - \frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right),$$

$$\rho_1\left(l - \frac{3}{4}a\right) = \rho_2\left(l - \frac{a}{4}\right).$$

Отношение плотности материалов кубиков 1 и 2 равно

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l - \frac{a}{4}}{l - \frac{3}{4}a}.$$

Решение 39. Теплообмен между кастрюлей и окружающей средой пропорционален разности температур $t_k - t$, где t – температура кастрюли. При плавлении льда $t = t_o = 0$ °C:

$$m\lambda = A(t_k - t_o)\tau,\ A = \frac{m\lambda}{(t_k - t_o)\tau}.$$

Здесь m – масса льда, A – коэффициент пропорциональности. При нагревании воды массой $2m$ от 0 °C до 1 °C ($\Delta t = 1$ °C) теплообмен остался таким же, как и при плавлении льда. Поэтому можно записать:

$$c\Delta t\cdot 2m = A(t_k - t_o)\Delta\tau_1 = m\lambda\frac{\Delta\tau_1}{\tau}.$$

Отсюда

$$\Delta\tau_1 = \frac{c\Delta t \cdot 2\tau}{\lambda} = 4,2 \text{ мин.}$$

При нагревании воды от $t = 20$ °С до 21 °С ($\Delta t = 1$ °С) потребуется время $\Delta\tau_2$:

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1 \frac{t_k - t_o}{t_k - t} = 21 \text{ мин.}$$

Решение 40. Пусть в первом случае сопротивление реостата равно R_1, во втором – равно R_2. По закону Ома имеем:

$$\begin{cases} I_1(r + R_1) = U \\ I_2(r + R_2) = U, \end{cases} \quad (1)$$

где $R_1 = \frac{P_1}{I_1^2} = 12$ Ом, $R_2 = \frac{P_2}{I_2^2} = \frac{6}{5}$ Ом.

Решая систему (1), получим

$$U = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 36 \text{ В}, \; r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = 6 \text{ Ом.}$$

2. Если сопротивление реостата равно нулю, то

$$I_o = \frac{U}{r} = 6 \text{ А.}$$

3. В общем случае мощность, которая выделяется на переменном напряжении R, можно представить в виде:

$$P_R = I^2 R = \frac{U^2}{(R + r)^2} R \text{ или } P_R = IU - I^2 r,$$

где IU – мощность, развиваемая источником. На рис. 28 представлена зависимость $P_R(I)$. Эта парабола, вершина которой соответствует P_{max} при силе тока $I = \frac{U}{2r}$. Следовательно,

$$P_{max} = \frac{U^2}{4r} = \frac{U^2 R_м}{(R_м + r)^2} \Rightarrow R_м = r.$$

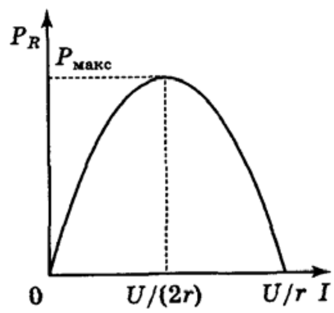

Рис. 28

Итак, $P_{max} = \frac{U^2}{4r} = 54$ Вт, $R_м = 6$ Ом.